System and Control
Volume (2)

Mohsen Soltanpour
Email: soltanpour@kntu.ac.ir
URL: http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

قانون اول ترمودینامیک: (1st law of thermodynamics)

قانون اول ترمودینامیک بیان می کند که انرژی همواره ثابت و بدون تغییر باقی می ماند. بنابراین قانون اول ورود، خروج و تجمع انرژی در یک سیستم یا حجم کنترل را در نظر می گیرد.

انرژی:

- انرژی ذخیره (stored energy): اساسا مربوط به جرم مشخصی است و میتوان آن را کمیتی گسترده در نظر گرفت.
- انرژی انتقالی (energy in transition): انرژی از یک سیستم به سیستم دیگر در حال انتقال است.

انواع انرژی ذخیره یک المان جرم:

۱- انرژی جنبشی E_K مربوط به حرکت جرم (kinetic energy)

۲- انرژی پتانسیل E_P مربوط به محل جرم در یک میدان پایستار (conservative) خارجی (potential energy)

۳-انرژی داخلی U مربوط به انرژی ملکولی و اتمی میدانهای داخلی جرم (Inertial energy)*

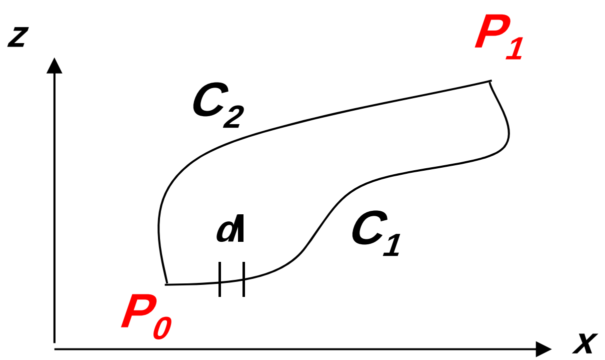
انرژی انتقالی

کار: انرژی منتقله از یک سیستم و یا به یک سیستم است هنگامی که نیروهای خارجی وارده به سیستم مسافتی را طی کنند. در ترمودینامیک مفهوم کار کلی تر بوده و بصورت انرژی منتقله از یک سیستم به سیستم دیگر تعریف می شود.

حرارت: نوعی انرژی است که در اثر اختلاف دما از یک سیستم به سیستم دیگر منتقل می شود.

انرژی ذخیره تابع نقطه ای (point function) بوده و تمام تغییرات آن را می توان بر حسب مقادیر آن در نقطه انتهایی بیان کرد (نیروی پایستار conservative).

انرژی انتقالی تابع مسیری (path function) بوده و تغییرات آن علاوه بر نقاط انتهایی به مسیر واقعی بین آن نقاط نیز وابسته است (نیروی غیر پایستار nonconservative).



اگر بردار $\vec{a}(x,z)$ را در صفحه در نظر بگیریم، انتگرال **A** در حالت کلی بستگی به مسیر انتخابی **C_1** یا **C_2** دارد:

$$A = \int_{P_0}^{P_1} \vec{a}.d\vec{l}$$

(مثلا کار: $U = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F\cos\alpha)ds = \int F_t ds$)

اگر بتوان انتگرال فوق را به صورت $F = \int_{P_0}^{P_1} dF$ نمایش داد (که در آن dF مشتق کامل (exact differential) تابع F است) داریم:

$$F=\int_{P_0}^{P_1} dF = F(P_1)-F(P_0)$$

با توجه به این که:

$$\begin{cases}\vec{a}=a_x\vec{i}+a_z\vec{k}\\ d\vec{l}=dx\vec{i}+dz\vec{k}\end{cases} \Longrightarrow \quad dF=\vec{a}.d\vec{l}=a_x dx+a_z dz$$

اما $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial z}dz=\nabla F.d\vec{l}$، بنابراین شرط مستقل از مسیر بودن انتگرال عبارت است از:

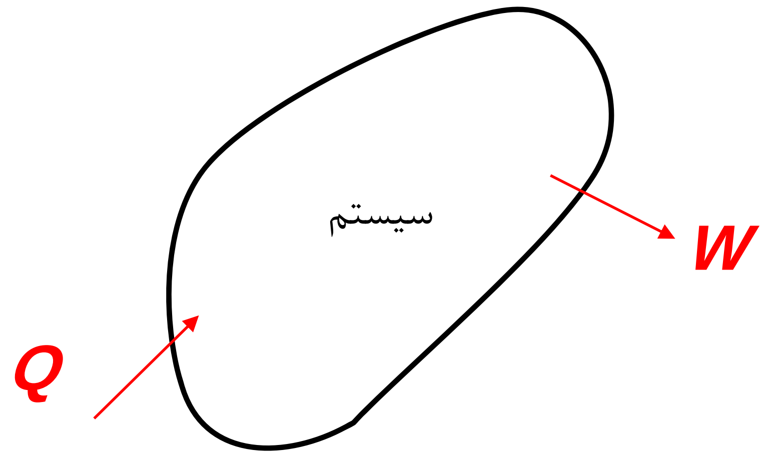
$$\begin{cases}a_x=\frac{\partial F}{\partial x}\\ a_z=\frac{\partial F}{\partial z}\end{cases}$$

و یا $\boxed{\vec{a}=\nabla F}$

پس نیرو وقتی پایستار است که بتوان مولفه های آن را از یک تابع پتانسیل استخراج کرد. در این حالت کار در یک مسیر مسدود صفر است:

$$\oint \vec{F}.d\vec{r}=0$$

تحلیل سیستم (system analysis)



گرمای خالص افزوده به سیستم و کار خالصی که سیستم روی محیط در فاصله زمانی Δt انجام می دهد با Q و W نشان داده می شوند.

اگر کل انرژی ذخیره شده در سیستم در لحظه t را با E نشان دهیم:

$$Q - W = \Delta E$$

$$= E_2(t+\Delta t) - E_1(t) = (E_K + E_P + U)_2 - (E_K + E_P + U)_1$$

در فاصله زمانی dt:

$$dE = dQ - dW$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{DE}{Dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}} \qquad \text{(I)}$$

E تابعی نقطه ای بوده و بر حسب متغیرهای فضا و زمان قابل بیان است. لذا برای دنبال کردن آن مشتق کلی (substantial derivative) بکار می رود.

چون Q و W تابعی نقطه ای نیستند می توان آنها را به صورت توابعی صریح (explicit function) نسبت به زمان نشان داد.

تحلیل حجم کنترل (Control volume analysis)

با استفاده از معادله انتقال رینولدز (E متغیر گسترده انرژی و e انرژی در واحد جرم):

$$N = E \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{dE}{dm} = e$$

با ثابت فرض نمودن g

$$e = e_k + e_P + u = \frac{dm\, v^2/2 + dmgz + dmu}{dm} = v^2/2 + gz + u$$

$$\frac{DE}{Dt} = \oiint_{CS} e(\rho\vec{v}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} e(\rho dV) \qquad \text{(II)}$$

با ترکیب دو معادله (I) و (II):

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \oiint_{CS} e(\rho\vec{v}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} e(\rho dV)}$$

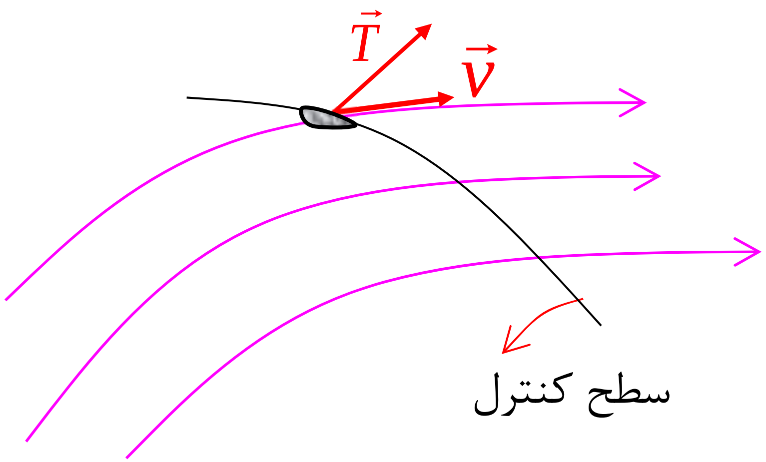
رابطه فوق بیان می کند که نرخ انتقال انرژی منتقله به حجم کنترل از طریق کار و حرارت برابر است با نرخ گذر انرژی ذخیره از پیرامون حجم کنترل بعلاوه نرخ افزایش انرژی ذخیره داخل حجم کنترل.

برای تعیین $\frac{dW}{dt}$ مناسب است W را به سه دسته طبقه بندی کرد:

۱- کار جریان (Flow work): ناشی از نیروهای سطحی موجود در قسمتهایی از سطح کنترل که از آنها جریان عبور می کند بر روی محیط (Surronding)

۲- کار محوری (Shaft work): W_s کار ناشی از تماس مستقیم اجزا داخلی و خارجی حجم کنترل به غیر از سیال بین سایر قسمتهای سطح کنترل و محیط اطراف. مثلا کاری که توسط محورها (shafts) یا جریان الکتریکی از سطح کنترل خارج یا به آن وارد می شود.

۳- کار داخل سطح کنترل در اثرعکس العمل نیروهای حجمی بر روی محیط. این کار می تواند توزیع نیروهای مغناطیسی و الکتریکی را شامل گردد نیروی حجمی B نباید شامل جاذبه باشد زیرا تاثیر جاذبه به صورت انرژی پتانسیل در نظر گرفته شده است.



کار جریان:$\vec{T}$ نیروی سطحی وارده از محیط به سطح کنترل است. بنابر این $\vec{T}.\vec{v}$ نرخ کار انجام شده در واحد زمان (توان*) توسط محیط بر روی سطح کنترل بر واحد سطح آن است. لذا نرخ کار خروجی** از حجم کنترل در واحد زمان (کل کار جریان) برابر است با:

$$-\oiint_{CS} \vec{T}.\vec{v}\,dA$$

به طریق مشابه اگر نیروی حجمی $\vec{B}$ معرف توزیع نیروی روی ماده داخل حجم کنترل وارده از محیط باشد، $\vec{B}.\vec{v}$ توان خروجی از حجم کنترل در واحد جرم ماده داخل حجم کنترل بوده و کل نرخ کار نیروی حجمی خروجی از حجم کنترل برابر است با:

$$-\iiint_{CV} \vec{B}.\vec{v}\rho dV$$

با جایگذاری:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}+\oiint_{CS}\vec{T}.\vec{v}dA+\oiint_{CV}\vec{B}.\vec{v}\rho dV\\&=\oiint_{CS}(\frac{v^2}{2}+gz+u)(\rho\vec{v}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}(\frac{v^2}{2}+gz+u)\rho dV\end{aligned}} \qquad (\mathrm{I})$$

در جریان بدون اصطکاک (frictionless flow) و همچنین جریان لزجی که سرعت سیال گذرنده از سطح کنترل در تمام نقاط بر آن عمود باشد می توان کل نرخ کار جریان را ساده کرد:

۱- در جریان بدون اصطکاک بردار $\vec{T}$ عمود بر سطح کنترل است ($\vec{T}$ و $\overrightarrow{dA}$ همراستا هستند)، بنابراین:

$$\vec{T} = \tau_{nn}\vec{n} = \tau_{nn}\frac{\overrightarrow{dA}}{dA} = -p\frac{\overrightarrow{dA}}{dA}$$

$$\Longrightarrow \quad -\oiint_{CS}\vec{T}.\vec{v}dA = \oiint_{CS}(p\frac{\overrightarrow{dA}}{dA}.\vec{v})dA = \oiint_{CS} p\vec{v}.\overrightarrow{dA} = \oiint_{CS} pv(\overbrace{\rho v}^{v\rho=1}\vec{v}.\overrightarrow{dA})$$

۲- جریان لزجی که سرعت سیال گذرنده از سطح کنترل در تمام نقاط بر آن عمود است بردارهای $\vec{v}$ و $\overrightarrow{dA}$ همراستا هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} \vec{v} = v\vec{n} \\ \vec{T}.\vec{n} = \tau_{nn} \\ \tau_{nn} = -p \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$-\oiint_{CS}\vec{T}.\vec{v}dA = -\oiint_{CS}(\overbrace{\vec{T}.\vec{n}}^{\tau_{nn}}\underbrace{v)dA}_{\vec{v}.\overrightarrow{dA}} = -\oiint_{CS}\tau_{nn}\vec{v}.\overrightarrow{dA} = \oiint_{CS} p\vec{v}.\overrightarrow{dA} = \oiint_{CS} pv(\rho\vec{v}.\overrightarrow{dA})$$

$\vec{v}.\overrightarrow{dA}$ (بردارهای $\vec{v}$ و $\overrightarrow{dA}$ همراستا هستند)

بنابراین معادله (I) اسلاید ۸ (قانون اول ترمودینامیک) برای جریان غیرلزج با ورودی و خروجیهای یک بعدی و جریان لزجی که در آن سرعت سیال گذرنده از سطح کنترل در تمام نقاط بر آن عمود باشد (نظیر جریان عبوری از یک لوله) به شکل زیر ساده می شود:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}-\oiint_{CS} pv(\rho\vec{v}.\overrightarrow{dA})+\oiint_{CV}\vec{B}.\vec{v}\rho dV$$
$$=\oiint_{CS}(\frac{v^2}{2}+gz+u)(\rho\vec{v}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}(\frac{v^2}{2}+gz+u)\rho dV$$

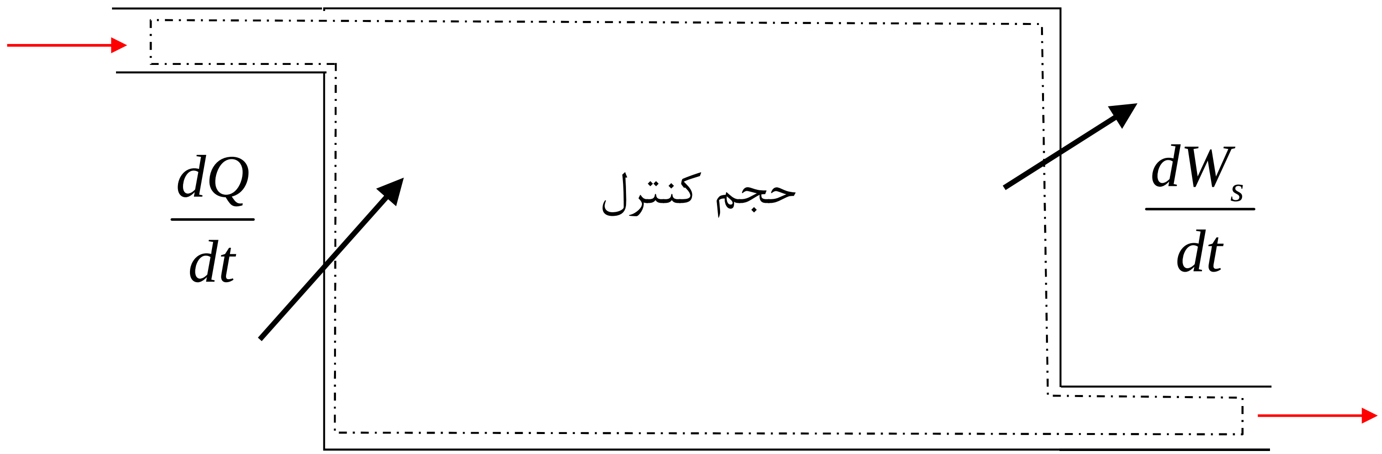
و یا

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}+\oiint_{CV}\vec{B}.\vec{v}\rho dV=\oiint_{CS}(\frac{v^2}{2}+gz+u+pv)(\rho\vec{v}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}(\frac{v^2}{2}+gz+u)\rho dV}$$

غالبا انرژی داخلی u و کار جریان pv را ترکیب کرده، $h=u+pv$ را آنتالپی مخصوص (specific enthalpy) می نامند.* با جایگذاری h:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}+\oiint_{CV}\vec{B}.\vec{v}\rho dV=\oiint_{CS}(\frac{v^2}{2}+gz+h)(\rho\vec{v}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}(\frac{v^2}{2}+gz+u)\rho dV}$$

در جریان دائمی با ورودی و خروجی یک بعدی می توان معادله فوق را ساده کرد:



$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}=-[\frac{v_1^2}{2}+g(z_c)_1+h_1](\rho v_1 A_1)+[\frac{v_2^2}{2}+g(z_c)_2+h_2](\rho v_2 A_2)$$

که در آن $(z_c)_1$ مربوط به مرکز سطح ورودی روی محور Z ها و $(z_c)_2$ مربوط به مرکز سطح خروجی روی محور Z ها می باشد. با در نظر گرفتن شرط پیوستگی:

$$dm/dt=\rho v_1 A_1=\rho v_2 A_2$$

$$\Rightarrow \quad [\frac{v_1^2}{2}+g(z_c)_1+h_1]+\frac{dQ/dt}{dm/dt}=[\frac{v_2^2}{2}+g(z_c)_2+h_2]+\frac{dW_s/dt}{dm/dt}$$

و یا

$$\boxed{[\frac{v_1{}^2}{2}+g(z_c)_1+h_1]+\frac{dQ}{dm}=[\frac{v_2{}^2}{2}+g(z_c)_2+h_2]+\frac{dW_s}{dm}}$$

که در آن $\frac{dQ}{dm}$ حرارت خالص داده شده به واحد دبی جرمی و $\frac{dW_s}{dm}$ کار محوری خالص بر روی واحد دبی جرمی می باشد.

در صورت وجود دو ورودی و یک خروجی با جریانهای یک بعدی با در نظر گرفتن معادله پیوستگی:

$$dm_3/dt = dm_1/dt + dm_2/dt$$

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}=$$

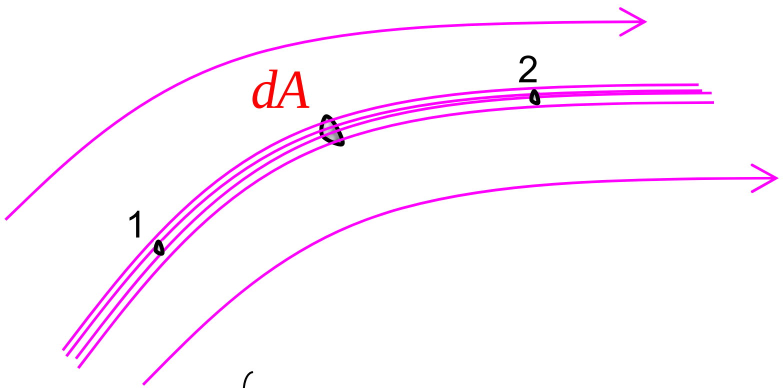
$$-[\frac{v_1^2}{2}+g(z_c)_1+h_1]\frac{dm_1}{dt}-[\frac{v_2^2}{2}+g(z_c)_2+h_2]\frac{dm_2}{dt}+[\frac{v_3^2}{2}+g(z_c)_3+h_3]\frac{dm_3}{dt}$$

و یا

$$\boxed{\begin{aligned}&[\frac{v_1^2}{2}+g(z_c)_1+h_1]\frac{dm_1}{dt}+[\frac{v_2^2}{2}+g(z_c)_2+h_2]\frac{dm_2}{dt}+\frac{dQ}{dt}=\\&\qquad[\frac{v_3^2}{2}+g(z_c)_3+h_3](\frac{dm_1}{dt}+\frac{dm_2}{dt})+\frac{dW_s}{dt}\end{aligned}}$$

معادله برنولی (Bernoulli’s equation)

اگر در جریان دائمی، غیر قابل تراکم و غیر لزج حجم کنترل را منطبق بر بخشی از یک لوله جریان در نظر بگیریم،
با اعمال قانون اول ترمودینامیک و با توجه به کوچک بودن سطح مقطع حجم کنترل:



$$\begin{cases}(z_c)_2 \to z_2 \\ (z_c)_1 \to z_1\end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{v_1^2}{2}+gz_1+h_1\right)+\frac{dQ}{dm}=\left(\frac{v_2^2}{2}+gz_2+h_2\right)+\cancelto{0}{\frac{dW_s}{dm}}$$

$$\left(\frac{v_1^2}{2}+gz_1+p_1v\right)=\left(\frac{v_2^2}{2}+gz_2+p_2v\right)+\left[(u_2-u_1)-\frac{dQ}{dm}\right]$$

اگرتنها جریان غیر لزجی در نظر گرفته شود که انتقال درجه حرارت و تغییر انرژی داخلی ندارد:

$$\frac{v_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}$$

معادله برنولی (Bernoulli’s equation)

این معادله بدین معنی است که بر روی خط جریان انرژی مکانیکی در واحد جرم ثابت است (اجزای معادله دارای واحد $(\frac{m}{s})^2 = \frac{kg.\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.m}{kg} = \frac{N.m}{kg}$ هستند):

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = cte}$$

با تقسیم بر g شکل دیگر دیگر معادله برنولی که انرژی در واحد وزن را (با بعد طول) نشان می دهد بدست می آید.
استفاده از این معادله در مسائل مایعات با سطح آزاد مناسبتر است.

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = cte}$$

با ضرب کردن معادله فوق در γ شکل دیگری حاصل می شود که برای گازها مناسب می باشد (در گازها جمله γz کم اهمیت بوده و می تواند حذف شود).

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = cte}$$

معادله برنولی بوسیله انتگرال گیری از معادله اولر

معادله اولر در جریان دائمی را می توان با شتاب انتقالی در مختصات جریان نمایش داد:*

$$(-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}-g\vec{\nabla}z)=\overbrace{(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}^{\vec{a}}$$

$$=\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}+\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}$$

$$=\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}$$

که s در امتداد خط جریان است. اگر جملات فوق را در $\overrightarrow{ds}$ ضرب کنیم:

$$(-\frac{\vec{\nabla}P.\overrightarrow{ds}}{\rho}-g\vec{\nabla}z.\overrightarrow{ds})=v\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}.\overrightarrow{ds}$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}P.\overrightarrow{ds}=dp & \text{جزء تغییر فشار در طول خط جریان}\\ \vec{\nabla}z.\overrightarrow{ds}=dz & \text{جزء تغییر ارتفاع در طول خط جریان}\\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial s}.\overrightarrow{ds}=dv & \text{تغییر سرعت در طول خط جریان}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{dP}{\rho}-gdz=vdv$$

$$=d(\frac{v^2}{2})$$

ویا:

$$\frac{dP}{\rho}+gdz+d(\frac{v^2}{2})=0$$

با انتگرال گیری روی خط جریان (g ثابت):

$$\boxed{\int^{P}\frac{dP}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}=cte}$$

معادله تراکم پذیر برنولی
(Compressible form of Bernouli's equation)

اگر جرم مخصوص را بتوان به فرم $\rho=\rho(P)$ (جریان باروتروپیک-Barotropic flow) تعریف کرد، جمله اول قابل انتگرال گیری است.

در جریان غیر قابل تراکم (Incompressible):

$$\frac{P}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}=cte$$

که همان معادله برنولی است.

همانگونه که مشاهده می شود در جریان ایزوترمال (Isothermal) بدون اصطکاک قانون اول ترمودینامیک و قانون نیوتن هم ارزش هستند. در صورت وجود اصطکاک (تغییر دما) و همچنین در جریان تراکم پذیر قانون اول ترمودینامیک و قانون نیوتن معادلاتی مستقل بوده و بطور جداگانه باید ارضا شوند.*